FACULTAD DE CIENCAS EXACTAS Y TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

- **CÁTEDRA:** "SISTEMAS DE CONTROL (PLAN 2004)"
- **DOCENTE:** Prof. Ing. Mec. Marcos A. Golato

ANÁLISIS DE RESPUESTAS TRANSITORIAS
SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Universidad Nacional de Tucumán
Fundada el 25 de mayo de 1914



RESPUESTAS DE SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

Sistema de segundo orden: es aquel que posee dos polos en su función de transferencia. Físicamente este sistema puede representar un circuito RLC paralelo, acoplamiento de dos tanques, tanque con sistema de calentamiento/enfriamiento, sistemas de masas inerciales, etc.

Genéricamente cualquier sistema dinámico lineal de segundo orden se puede representar por la siguiente ecuación diferencial ordinaria lineal:

$$a_2 \frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bu(t)$$

(con a_1, a_2, a_o y b constantes)

Frecuentemente se acostumbra escribir esta ecuación como:

$$\tau^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy}{dt} + y = Ku(t)$$

donde:

$$\tau = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}\,; \qquad 2\zeta\tau = \frac{a_1}{a_0} \qquad K = \frac{b}{a_0}$$ (suponiendo $a_0 \neq 0$).

Aplicando la Transformada de Laplace m.a.m. a la ED:

$$\tau^2 \mathcal{L}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) + 2\zeta\tau\mathcal{L}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \mathcal{L}(y) = K\mathcal{L}(u)$$

$$\tau^2\left(s^2 y(s)\right) + 2\zeta\tau\,(s\ y(s)) + y(s) = Ku(s)$$

$$y(s)[\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1] = Ku(s) \longrightarrow g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

Función transferencia del sistema de segundo orden.

Vemos que g(s) no tiene ceros, pero tiene dos polos dados por las raíces del polinomio característico.

Donde:

$$\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = 0$$

$$s_1 = -\frac{2\zeta\tau + \sqrt{4\zeta^2\tau^2 - 4\tau^2}}{2\tau^2}$$

$$s_2 = -\frac{2\zeta\tau - \sqrt{4\zeta^2\tau^2 - 4\tau^2}}{2\tau^2}$$

Los parámetros *K, ζ, τ,* caracterizan la conducta de los sistemas de segundo orden y se definen como:

K = ganancia.

ζ = factor de amortiguamiento.

τ = periodo natural.

Suponiendo que tanto *τ* como *K* >0, el tipo de raíz (real o compleja) esta determinada por los valores del parámetro *ζ* según:

$\zeta > 1$ → se tienen 2 raíces reales diferentes.

$\zeta < 1$ → existen 2 raíces complejas conjugadas.

$\zeta = 0$ → tenemos 2 raíces complejas.

OBSERVACIONES

• $1/\tau = \omega_n$ = denota la frecuencia natural, el cual es un indicador de la rapidez de respuesta.
• ζ = es el factor de amortiguamiento, el cual proporciona una idea del grado de oscilación de la respuesta.
• El comportamiento dinámico de los sistemas de segundo orden, pueden describirse en términos de los parámetros ω_n y ζ.
Para facilitar el análisis se realiza el siguiente cambio de variables:

$$\begin{cases} K = \omega_n^2 \\ \omega_n = 1/\tau \longrightarrow \omega_n^2 = 1/\tau^2 \longrightarrow \tau^2 = 1/\omega_n^2 \\ g(s) = \dfrac{y(s)}{u(s)} = \dfrac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} \longrightarrow \dfrac{y(s)}{u(s)} = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{cases}$$

Función transferencia estándar de segundo orden en función de ω_n y ζ.

RESPUESTA TRANSITORIA ANTE UNA ENTRADA ESCALÓN UNITARIO

Se presentan tres casos:

(1) Caso subamortiguado $(0 < \zeta < 1)$: los polos de lazo cerrado son complejos conjugados y yacen en el semiplano "s" izquierdo.

En este caso se escribe: $y(s)/u(s)$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + j\omega_d)(s + \zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ se denomina "frecuencia natural amortiguada".

Si $u(s)$ es una entrada escalón:

$$y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)s}$$

Utilizando fracciones parciales

$$y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

Aplicando Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t}\cos\omega_d t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right] = e^{-\zeta\omega_n t} sen\,\omega_d t$$

Se obtiene la salida en el tiempo

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \qquad (t \geq 0)$$

OBSERVACIÓN:

- Si la señal de entrada de tipo escalón, no fuese unitario (A/s), la expresión de la respuesta debe ir multiplicada por la amplitud del escalón (A).
- En la ecuación de la respuesta y(t), se observa que la frecuencia de oscilación transitoria es la frecuencia natural amortiguada ω_d y que, por tanto, varía con el factor de amortiguamiento ζ.
- La señal de error para este sistema es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de salida, y resulta:

$$e_{(t)} = u_{(t)} - y_{(t)} = e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\ \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ sen\ \omega_d t\right) \qquad \text{para } t \geq 0$$

- Esta señal presenta una oscilación senoidal amortiguada. En régimen estacionario (t = ∞), no hay error entre la entrada y la salida.
- Para ζ = 0, la respuesta se vuelve NO amortiguada y las oscilaciones continúan indefinidamente. Para este caso la salida nos queda:

$$y(t) = 1 - \cos\omega_n t, \qquad \text{para } t \geq 0$$

(2) Caso de amortiguamiento crítico $(\zeta = 1)$:

en este caso se tienen dos polos reales iguales e $y(s)$, ante un escalón resulta:

$$y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2 s}$$

Aplicando La Transformada Inversa de Laplace, la respuesta temporal resulta:

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t) \qquad (t \geq 0)$$

(3) Caso sobreamortiguado $(\zeta > 1)$:

en este caso se tienen dos polos reales negativos y diferentes. Para una entrada escalón, $y(s)$ es:

$$y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})s}$$

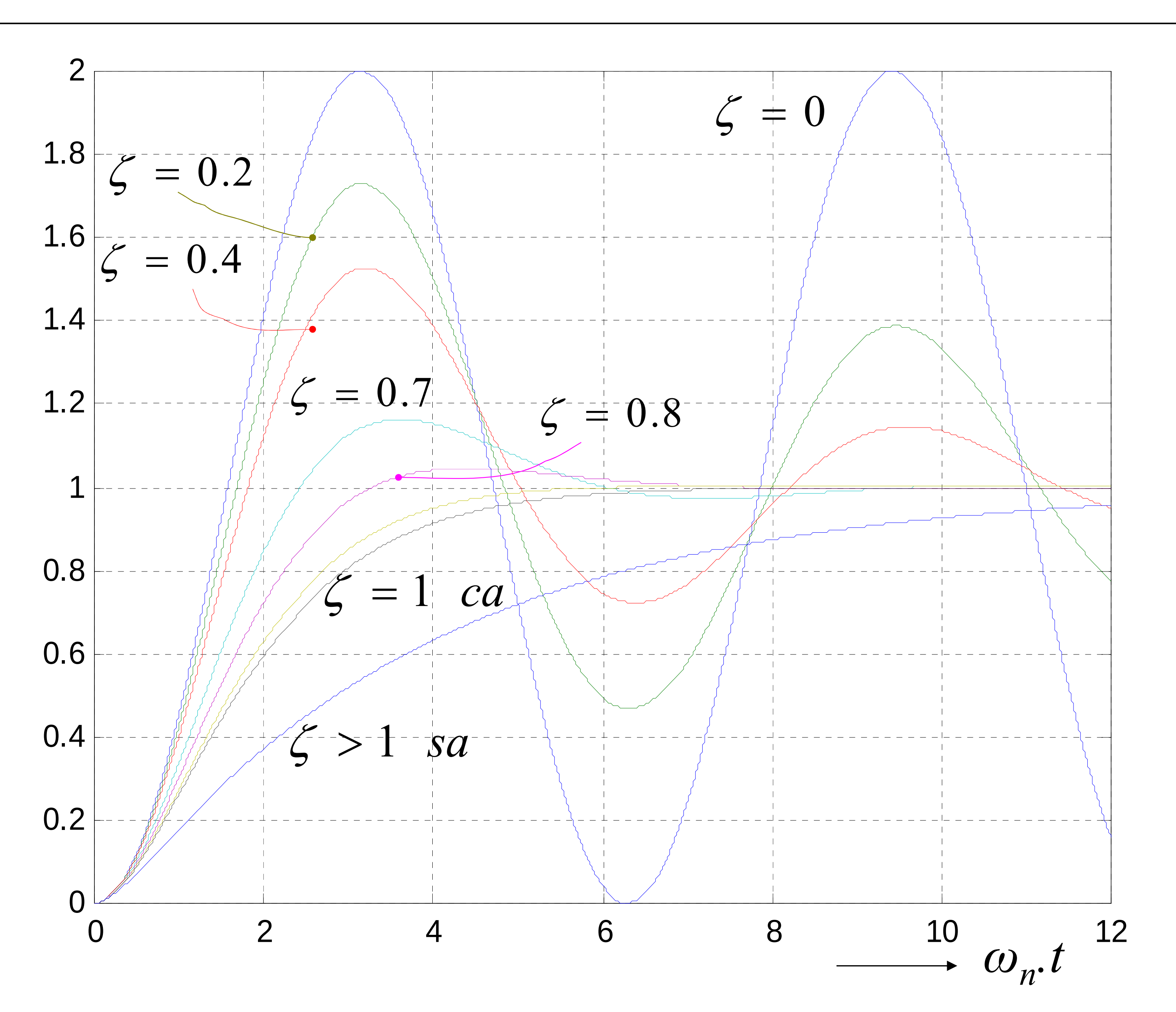
Aplicando La transformada inversa de Laplace a la ecuación resulta:

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$

Cuando ζ es >> 1, uno de los dos exponenciales que decaen disminuye mucho más rápido que el otro, por lo que el término exponencial que decae más rápido puede despreciarse (corresponde a una constante de tiempo más pequeña). Para este caso la respuesta temporal resulta:

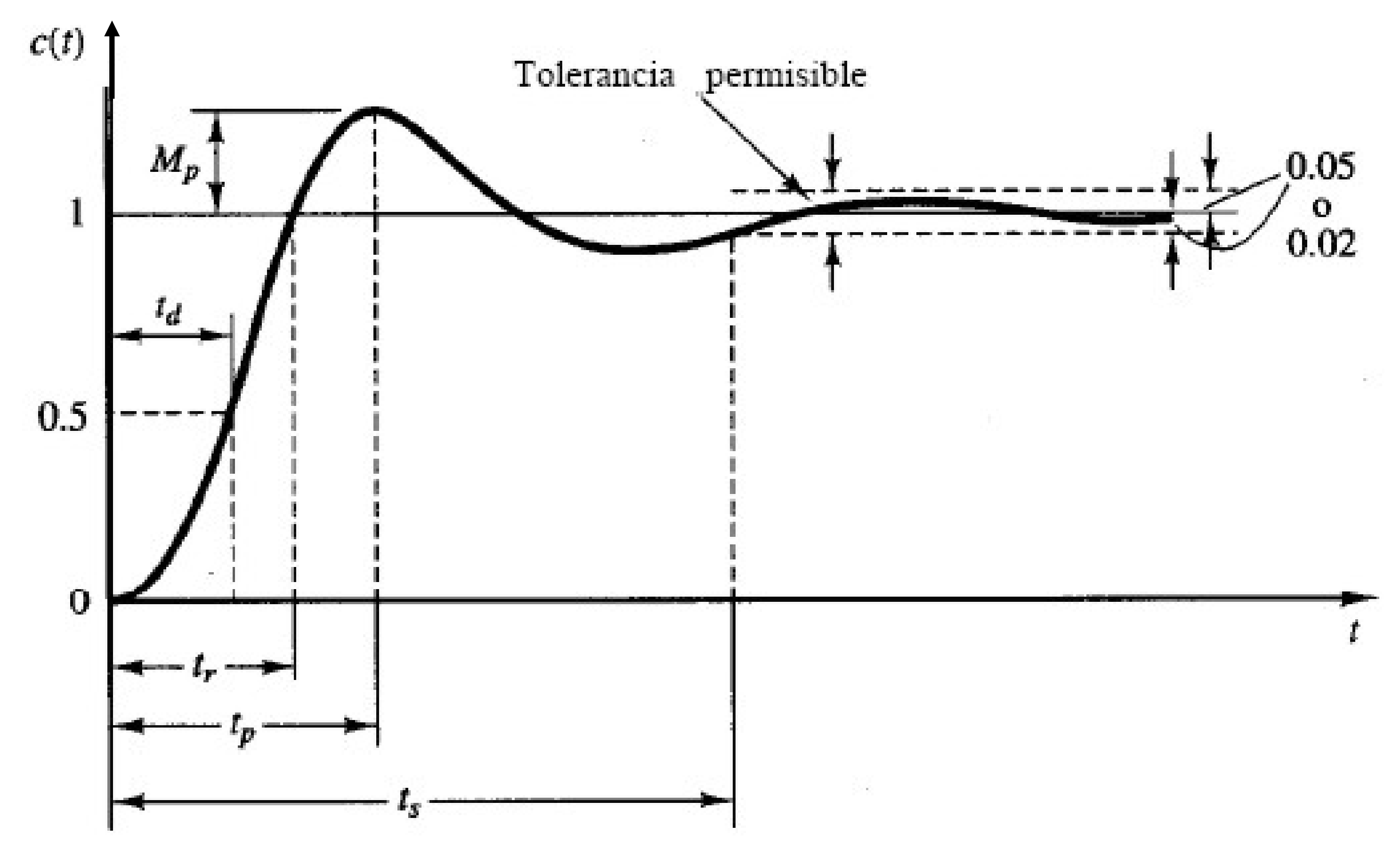
$$y(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \qquad \text{para } t \geq 0$$

Respuesta al escalón para sistemas de segundo orden para diferentes valores del coeficiente de amortiguamiento ζ .



ESPECIFICACIONES DE LA RESPUESTA TRANSITORIA

Las características deseadas de un sistema de control, se especifican en términos de cantidades en el dominio del tiempo. Normalmente se especifica la respuesta transitoria según una entrada del tipo escalón unitario.



1. Tiempo de retardo, t_d: tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final.

2. Tiempo de crecimiento, t_r: tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90%, del 5 al 95% o del 0 al 100% de su valor final.

3. Tiempo pico, t_p: tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobreimpulso.

4. Sobreimpulso (%), M_p: es el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad.

5. Tiempo de establecimiento, t_s: tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final. Por lo general, de 2 a 5% y permanezca dentro de él.

OBSERVACIÓN:

• Si el valor final en estado estable de la respuesta es diferente de la unidad, es común usar un porcentaje del sobreimpulso. Se define mediante:

$$\textbf{Porcentaje de sobreimpulso} = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

El valor del máximo sobreimpulso (%), nos da una idea de la estabilidad relativa del sistema.

• Al especificar los valores de t_d, t_r, t_p, t_s y M_p, queda determinada la forma de la curva de respuesta.

• No todas las especificaciones son frecuentes en los sistemas de control. Para un sistema sobreamortiguado no se aplican los términos t_p y M_p.

• En algunos casos es necesario que la respuesta de un sistema sea lo suficientemente rápida y amortiguada, para estos casos $\zeta = 0{,}4$ a $0{,}8$. Para valores de $\zeta < 0{,}4$ producen excesivo sobreimpulso M_p y para valores de $\zeta > 0{,}8$, el sistema responde muy tardíamente.

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN Y ESPECIFICACIONES DE LA RESPUESTA TRANSITORIA

A continuación describiremos las especificaciones de sistemas de 2do orden en términos de ζ y ω_n.

Tiempo de crecimiento "t_r"

La respuesta de un sistema sub-amortiguado era:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \qquad (t \geq 0)$$

Si hacemos $y_{(tr)} = 1$, obtenemos:

$$t_r = \frac{1}{\omega_d}\tan^{-1}\left(\frac{\omega_d}{-\sigma}\right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$ **(Tiempo de crecimiento)**

Donde sabemos que:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$ **(frecuencia natural amortiguada)**

Es fácil observar que para un valor pequeño de t_r, ω_n debe ser alto.

Tiempo de pico "t_p"

Si derivamos $y_{(t)}$ con respecto del tiempo y la igualamos a cero se llega a:

$$\frac{dy}{dt} = \zeta e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\ \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\ \text{sen}\ \omega_d t\right) + e^{-\zeta\omega_n t}\left(\omega_d\ \text{sen}\ \omega_d t + \frac{\zeta\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos\ \omega_d t\right)$$

Los términos de coseno de esta última ecuación se cancelan uno al otro, por lo que la ecuación evaluada en $t = t_p$, se simplifica a:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_p} = (\text{sen}\ \omega_d t_p)\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t_p} = 0 \longrightarrow \text{sen}\ \omega_d t_p = 0 \longrightarrow \omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$$

Dado que el tiempo pico corresponde al primer pico de sobre impulso máximo, entonces $\omega_p . t_p = \pi$.
Por tanto:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$ **(Tiempo de pico)**

El tiempo pico t_p corresponde a medio ciclo de la frecuencia de oscilación amortiguada.

Sobreimpulso máximo "M_p"

se presenta en el tiempo pico ($t = t_p = \pi / \omega_d$). Por tanto, Mp se obtiene como:

$$M_p = y_{(tp)} - 1$$

$$= e^{-\zeta\omega_n(\pi/\omega_d)}\left(\cos\pi + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\operatorname{sen}\pi\right)$$

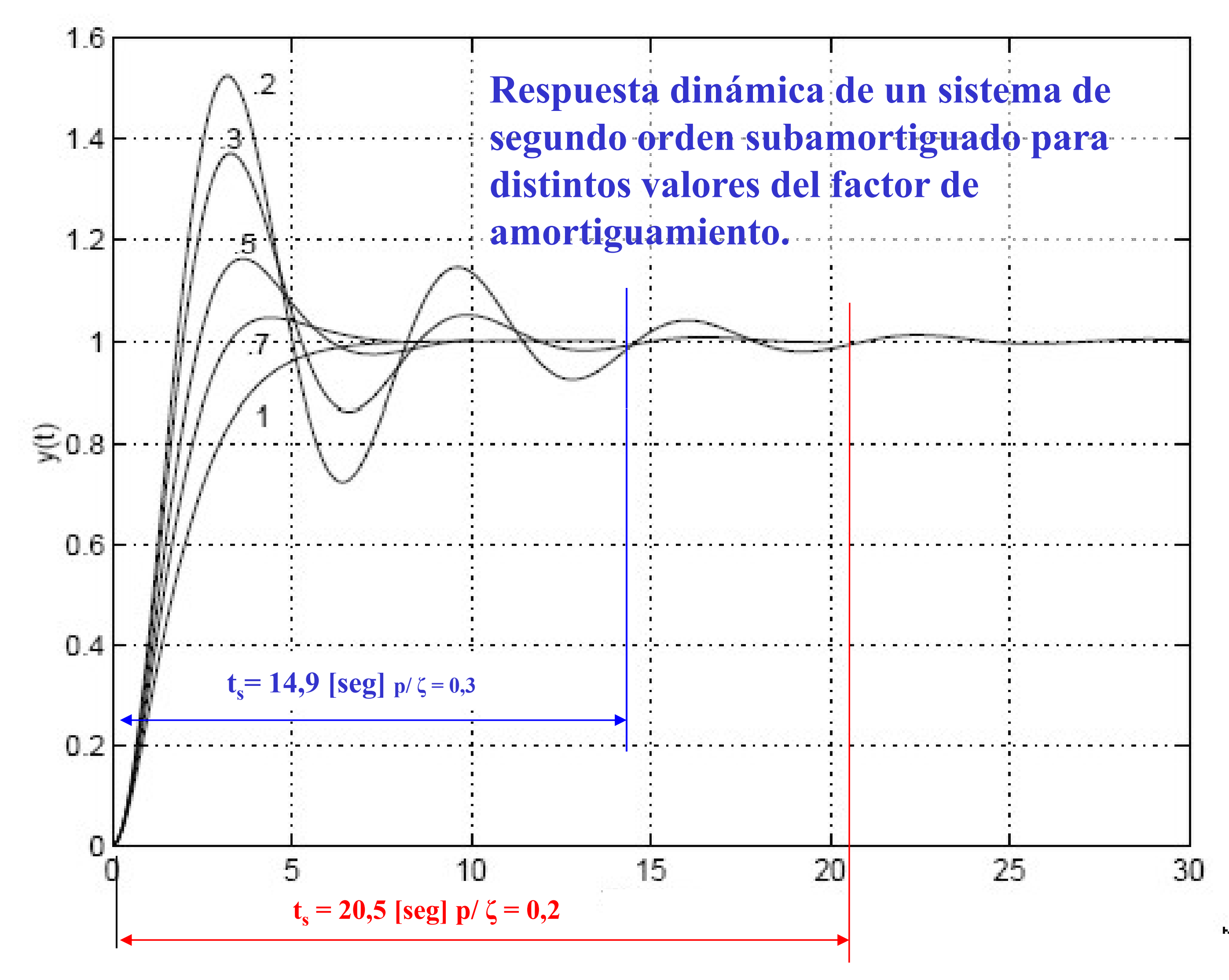
$$= e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

Donde: $\sigma = \zeta\omega_n$ **(Atenuación)**

Si la señal de forzamiento es "no unitaria", por ejemplo si el escalón posee una amplitud "A", tenemos que:

$$M_p = A.e^{-(\sigma/\omega_d)\pi} = A.\ e^{-(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})\pi}$$

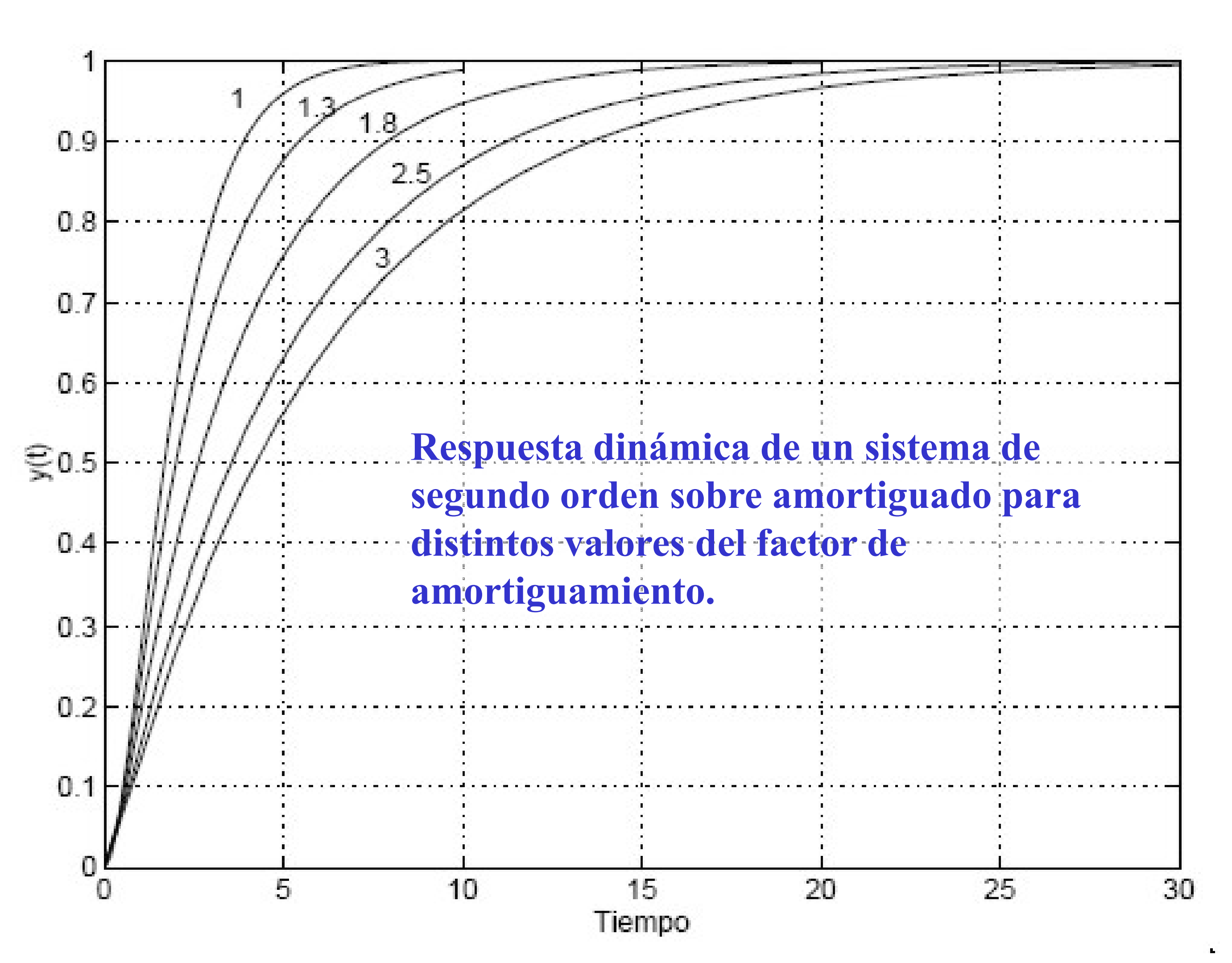
OBSERVACIONES PARA SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS



- La velocidad de caída de la respuesta transitoria depende del valor de la constante de tiempo “T”.
- El tiempo de establecimiento “t_s”, para un sistema apenas amortiguado, es mayor que para un sistema muy amortiguado.

$$T = \frac{1}{\zeta \omega_n}$$ (Cte. de tiempo)

OBSERVACIONES PARA SISTEMAS SOBREAMORTIGUADOS



Respuesta dinámica de un sistema de segundo orden sobre amortiguado para distintos valores del factor de amortiguamiento.

- Para un sistema sobre amortiguado, "t_s" se hace grande debido a la tardanza en la iniciación de la respuesta.
- Cuanto menor es la cte. de tiempo "T", más rápida es la velocidad de respuesta y por lo tanto un tiempo t_s menor.

$$T = \frac{1}{\zeta \omega_n}$$ **(Cte. de tiempo)**

COMPROMISO DE DISEÑO EN SISTEMAS DE 2^{do} ORDEN





Recordemos que:

Para asegurar una respuesta transitoria aceptable:

1- El coeficiente de amortiguamiento ζ no debía ser demasiado pequeño.

2- La frecuencia natural no amortiguada ω_n, debía ser grande.

3- Por otro lado, para asegurar un error estacionario aceptable, se podía lograr aumentando la ganancia K del sistema.

¡Pero en estos casos la respuesta se hacía muy oscilatoria, aumentando el máximo sobreimpulso!.

Entonces de lo expuesto surge la necesidad de llegar a un compromiso entre el valor del error estacionario y el máximo sobreimpulso.

CONCEPTO DE ESTABILIDAD DE UN SISTEMA

Para que un sistema de control tenga un valor práctico, su principal condición es que sea estable.

Recordemos que:
Un sistema físicamente estable es aquel en el cual los transitorios decaen, es decir, la respuesta transitoria desaparece para valores crecientes en el tiempo.

Supóngase un sistema continuo de segundo orden, cuya función de transferencia es:

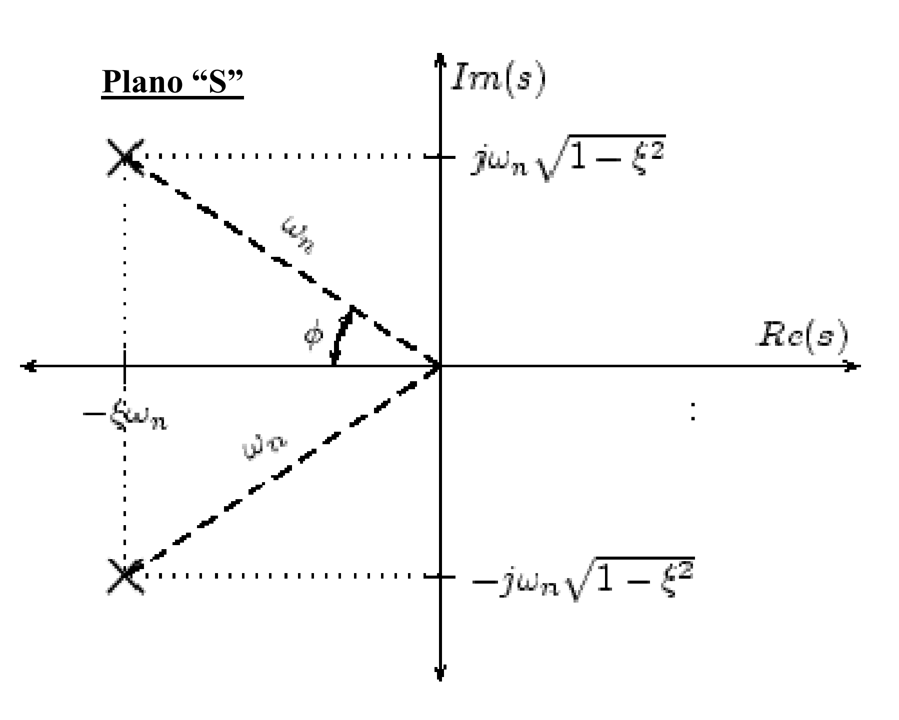
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Los polos de la función de transferencia serán:

$$p_{1,2} = \frac{-2\xi\omega_n \pm \sqrt{4\xi^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

En caso de que: $|\xi| < 1$

el radical es negativo, y los polos resultan ser complejos conjugados:



Ubicación de los polos de un sistema continuo de segundo orden, con polos complejos

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

La figura muestra la ubicación de los polos complejos. Nótese que la distancia de los polos al origen (la magnitud del complejo) es justamente ω_n.

$$d = \sqrt{(\xi\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} = \omega_n$$

Además, el coseno del ángulo Ø formado con el semieje real negativo, es justamente ζ.

$$\cos\phi = \frac{\xi\omega_n}{\omega_n} = \xi$$

Si evaluamos la respuesta temporal para el sistema supuesto, tenemos que:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \qquad (t \geq 0)$$

y como: $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$

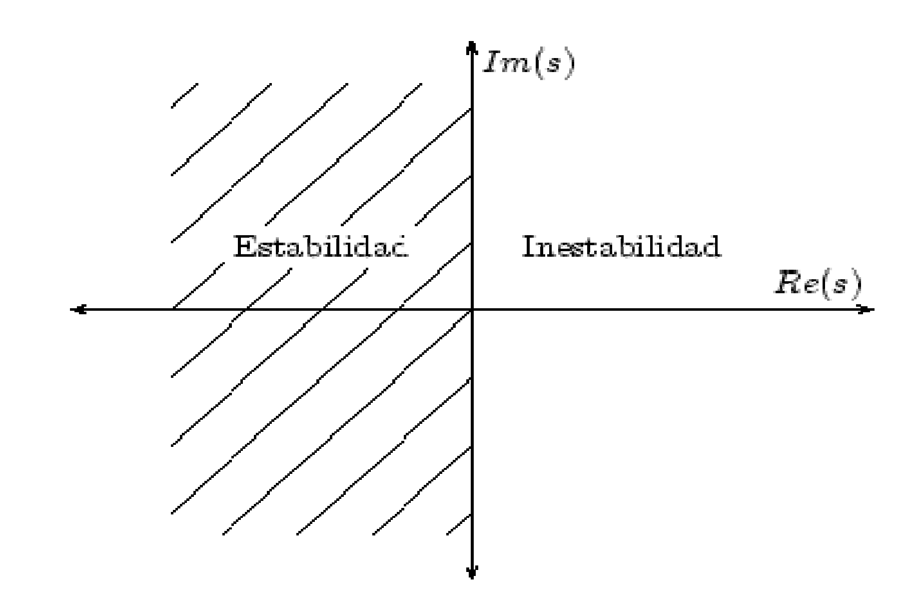
podemos escribirla de manera más práctica, como:

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} sen\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}.t + \phi \right) \qquad (t \geq 0)$$

Al evaluar estas expresiones, se observa que para valores positivos de $-\zeta.\omega_n$, el término exponencial crece indefinidamente, y por tanto la respuesta se hace infinita.

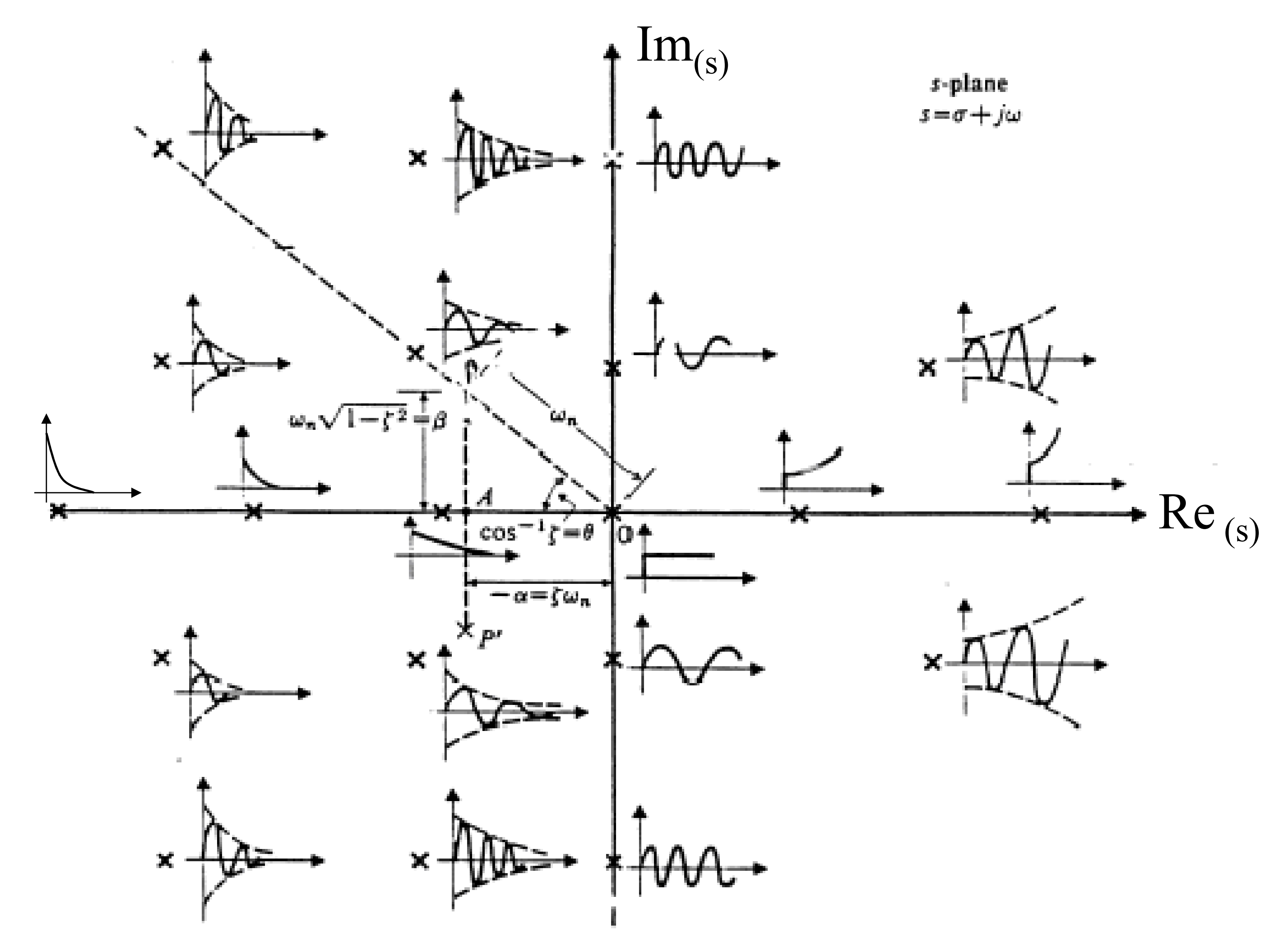
REGIÓN DE ESTABILIDAD

El término -$\zeta.\omega_n$ coincide con la parte real de los polos del polinomio característico, tal como se muestra en el Plano "S", por lo tanto, la región de estabilidad, aquella en la que deben ubicarse los polos para que el sistema sea estable, resulta ser el semiplano izquierdo.



Región de Estabilidad para un sistema continuo de segundo orden

Para ello se requiere que los coeficientes de "t" en los términos exponenciales de la solución transitoria, sean números reales negativos o números complejos con partes reales negativas.


Im(s)
s-plane
s=σ+jω
Re (s)
ωn
A
cos⁻¹ζ=θ
O
−α=ζωn
P'

OBSERVACIONES

- Una señal aplicada a un sistema no tiene efecto en la estabilidad del mismo. Un sistema que es estable a una señal, lo es también a todas las señales.
- Si las raíces del polinomio característico son reales positivas o complejas con partes reales positivas, el sistema resulta inestable.
- En los casos de tener raíces con parte real cero, la respuesta de estos sistemas es una oscilación persistente, que no decae ni crece en el tiempo (Estabilidad Limitada). En la práctica se consideran inestables.
- Para una estabilidad absoluta, todas las raíces deben ser números reales negativos o números complejos con partes reales negativas.

CRITERIO DE ROUTH

Criterio de Routh-Hurwitz (estabilidad absoluta): prueba si las raíces del polinomio característico están en el semiplano de la izquierda o de la derecha.

Supongamos la funcion transferencia de un sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + b_{m-2} s^{m-2} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

1- Tomamos en polinomio característico del mismo:

$$A(s) = 1 + G(s)H(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_0$$

2- Armamos el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^0 & g_1 & & &
\end{array}$$

Donde:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}.a_{n-2} - a_n.a_{n-3}}{a_{n-1}} \; ; \quad b_2 = \frac{a_{n-1}.a_{n-4} - a_n.a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}.a_{n-6} - a_n.a_{n-7}}{a_{n-1}} \; ; \quad c_1 = \frac{b_1.a_{n-3} - a_{n-1}.b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1.a_{n-5} - a_{n-1}.b_3}{b_1} \; ; \quad c_3 = \frac{b_1.a_{n-7} - a_{n-1}.b_4}{b_1}$$

3- Se investigan los signos de la primera columna del arreglo:

Routh establece que el numero de cambios de signos en la primera columna del arreglo es igual al numero de raíces con partes reales positivas.

Ejemplo 1: $x^5+3x^4+7x^3+20x^2+6x+15 = 0$

El arreglo de Routh es:

1	7	6
3	20	15
1/3	1	
11	15	
6/11		
15		

El sistema es estable. No hay cambios de signo en la primera columna, y por lo tanto, no hay raíces con partes reales positivas.

Ejemplo 2: $x^4+2x^3+3x^2+8x+2 = 0$

El arreglo de Routh es:

1	3	2
2	8	
-1	2	
12		
2		

El sistema es inestable. Hay dos cambios de signo en la primera columna (de mas a menos y de menos a mas), lo que indica que hay dos raices con partes reales positivas.

OBSERVACIONES

- Este criterio establece que el número de raíces con parte real positiva (semiplano derecho) es igual al número de cambios de signo en la primera columna del "Arreglo de Routh". La condición necesaria y suficiente de estabilidad es si y sólo si todos los elementos de la primera columna del "Arreglo" son positivos.
- Este criterio de evaluación de la estabilidad de un sistema, puede ser aplicado a sistemas SISO, MIMO, y multilazos.
- Todos los elementos de cualquier renglón pueden multiplicarse o dividirse por una constante sin afectar los cambios de signos de la primera columna.
- Si en el arreglo aparece un renglón de ceros, el sistema es inestable o posee una estabilidad limitada.
- Si la primera cantidad en un renglón es cero, mientras que las otras no lo son, el procedimiento consiste en reemplazar el cero por un numero "ε" pequeño y positivo. Los cambios de signos de la columna formada puede obtenerse haciendo que "ε" tienda a cero.